13 Combinatoria

INTRODUCCIÓN

La combinatoria estudia las distintas formas de agrupar y ordenar los elementos de un conjunto, según unas normas establecidas.

En esta unidad se aprende a formar esas agrupaciones y a hacer su recuento por métodos de conteo.
Se aprenderá también a clasificar las agrupaciones en permutaciones o variaciones, con y sin repetición de elementos, y en combinaciones.

Asimismo, se introducen los números combinatorios y el desarrollo del binomio de Newton.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Métodos de conteo.*
- *Números combinatorios.*
- Propiedades de los números combinatorios.
- *Binomio de Newton.*
- *Variaciones* de n elementos, tomados de m en m, con y sin repetición.
- *Permutaciones* de n elementos, con y sin repetición.
- *Combinaciones* de n elementos, tomados de m en m.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Utilizar distintos métodos de conteo.	• Método del producto. • Diagrama de árbol.	• Realización de conteos por el método del producto. • Elaboración de diagramas de árbol.
2. Manejar números combinatorios.	• $n!$ • $\binom{n}{m}$ • Propiedades de los números combinatorios.	• Desarrollo de $n!$. • Desarrollo de $\binom{n}{m}$. • Aplicación de las propiedades de los números combinatorios.
3. Utilizar el binomio de Newton.	• $(a+b)^n$ • Triángulo de Tartaglia.	• Desarrollo de distintas potencias de binomios.
4. Distinguir entre variaciones y permutaciones.	• $V_{n,\,m}$ • $VR_{n,\,m}$ • P_n	• Aplicación directa de las fórmulas. • Resolución de problemas.
5. Identificar combinaciones de n elementos tomados de m en m.	• $C_{n,\,m}$	• Aplicación directa de la fórmula. • Resolución de problemas.
6. Distinguir entre variaciones, permutaciones y combinaciones.	• Distinción entre $V_{n,\,m}$, $VR_{n,\,m}$, P_n y $C_{n,\,m}$.	• Resolución de problemas.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

13 OBJETIVO 1
UTILIZAR DISTINTOS MÉTODOS DE CONTEO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

MÉTODO DEL PRODUCTO

El **método del producto** es un método de conteo que consiste en descomponer el experimento en otros experimentos más simples y multiplicar el número de posibilidades de cada uno de ellos.

EJEMPLO

Sacamos cuatro cartas, sin devolución, de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener?

- Primera carta ⟶ cualquiera de las 40 cartas ⟶ 40 posibilidades
- Segunda carta ⟶ cualquiera de las 39 cartas restantes ⟶ 39 posibilidades
- Tercera carta ⟶ cualquiera de las 38 cartas restantes ⟶ 38 posibilidades
- Cuarta carta ⟶ cualquiera de las 37 cartas restantes ⟶ 37 posibilidades

Podemos obtener: $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 = 2.193.360$ resultados.

1 **Jimena quiere llevarse de vacaciones dos libros y una película, eligiendo entre cinco libros y ocho películas. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo?**

2 **¿De cuántas formas diferentes puedes colocar las cifras del número 9.432?**

3 **En un restaurante podemos elegir entre tres primeros platos, tres segundos platos, dos postres y cuatro bebidas. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?**

DIAGRAMA DE ÁRBOL

El **diagrama de árbol** es un método gráfico de conteo que consiste en marcar, como si fueran las ramas en un árbol, las posibilidades que aparecen en cada uno de los experimentos simples en los que se descompone el experimento. El número de posibilidades se obtiene contando las ramas finales.

EJEMPLO

Olivia tiene cuatro bufandas: roja, azul, negra y verde. Nacho tiene tres gorros: gris, naranja y blanco. ¿De cuántas formas diferentes se podrán poner un gorro y una bufanda cada uno si deciden compartir sus prendas?

Los experimentos simples son elegir una bufanda y elegir un gorro. Realizamos un diagrama de árbol.

BR < GG — BR, GG
BR < GN — BR, GN
BR < GB — BR, GB

BA < GG — BA, GG
BA < GN — BA, GN
BA < GB — BA, GB

BN < GG — BN, GG
BN < GN — BN, GN
BN < GB — BN, GB

BV < GG — BV, GG
BV < GN — BV, GN
BV < GB — BV, GB

Olivia y Nacho pueden elegir entre 12 conjuntos de gorro y bufanda.

4 **Sabemos que Pedro, Alberto y Alejandro han llegado primero, segundo y tercero en una prueba de natación, pero se desconoce en qué orden. Escribe los posibles resultados ayudándote de un diagrama de árbol.**

5 **Con los dígitos 2, 3 y 4 formamos números de dos cifras.**

a) ¿Cuántos números hay de dos cifras distintas?

b) Si las cifras pueden repetirse, ¿cuántos números podemos hacer?

OBJETIVO 2

MANEJAR NÚMEROS COMBINATORIOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Dado un número natural n, el **factorial de n** se escribe $n!$.

$$\mathbf{n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Se considera que **0! = 1**.

Dados dos números naturales m y n, ($m < n$), el **número combinatorio n sobre m** se escribe: $\binom{n}{m}$.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n \quad m)!}$$

EJEMPLO

Calcula.

a) $\mathbf{7!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$

b) $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}} = \frac{8!}{5! \cdot (8 - 5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

1 **Calcula.**

a) $9!$

b) $10! - 8!$

c) $\binom{14}{11}$

d) $\binom{15}{5}$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{m} = \binom{n}{n - m} \qquad \binom{n}{m} + \binom{n}{m + 1} = \binom{n + 1}{m + 1}$$

EJEMPLO

Demuestra que se verifica la igualdad: $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{6}} + \binom{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} = \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}$

$$\binom{9}{6} + \binom{9}{7} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 2 \cdot 1} = 84 + 36 = 120$$

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

2 **Demuestra que se verifican las siguientes igualdades.**

a) $\binom{12}{3} = \binom{12}{4} - \binom{13}{4}$

b) $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

c) $\binom{123}{0} = 1$

OBJETIVO 3

UTILIZAR EL BINOMIO DE NEWTON

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para calcular las potencias del binomio $(a+b)^n$ se utiliza una fórmula llamada del **binomio de Newton**.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Y para realizar el cálculo de los números combinatorios se puede usar el **triángulo de Tartaglia**.

1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
1 2 1	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

EJEMPLO

$$(x-2)^4 = \binom{4}{0} x^4 \cdot (-2)^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot (-2)^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot (-2)^2 + \binom{4}{3} x^1 \cdot (-2)^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot (-2)^4 =$$

$$= 1x^4 \cdot 1 + 4x^3 \cdot (-2) + 6x^2 \cdot 4 + 4x^1 \cdot (-8) + 1x^0 \cdot 16 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

1 **Desarrolla y simplifica cuando sea posible.**

a) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^3 =$

b) $(x^2 - 1)^5 =$

c) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)^4 =$

d) $\left(\frac{x}{2} - x\right)^6 =$

2 **Completa el siguiente desarrollo.**

$$(y+3)^{\square} = \binom{5}{0} y^{\square} 3^0 + \binom{5}{1} \square\, 3^2 + \binom{5}{2} y^2 \square + \binom{5}{} \square + \binom{5}{} y^4 3^1 + \binom{5}{0} y^5 3^0 =$$

$$= \square + \square + \square + \square + \square + \square$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

13 OBJETIVO 4
DISTINGUIR ENTRE VARIACIONES Y PERMUTACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **variaciones**, $\boldsymbol{V_{n,\,m}}$, cuentan los diferentes grupos de m elementos que se pueden formar con los n elementos de un conjunto ($m < n$), siempre que los elementos no se puedan repetir e influya el orden en que los coloquemos.

$$V_{n,\,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Las **variaciones con repetición** de n elementos, tomados de m en m, $\boldsymbol{VR_{n,\,m}}$, son variaciones en las que los elementos se pueden repetir.

$$VR_{n,\,m} = n^m$$

EJEMPLO

Calcula.

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas se forman con los dígitos impares?

b) ¿Y si las cifras se pueden repetir?

a) Tenemos $n = 4$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 3$ elementos. Influye el orden, por ejemplo, $315 \neq 351$. Las cifras han de ser distintas.

$$V_{4,\,3} = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \text{ números}$$

b) Tenemos $n = 4$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 3$ elementos. Influye el orden, por ejemplo, $315 \neq 351$. Las cifras pueden repetirse.

$$VR_{4,\,3} = 4^3 = 64 \text{ números}$$

1 **Se asigna a cada uno de los 25 alumnos de una clase un número. Se introducen en una bolsa 25 bolas numeradas, de las cuales sacamos tres. La primera bola que saquemos será para el delegado, la segunda para el subdelegado y la tercera para el secretario de la clase. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?**

2 **Una caja tiene una bola de cada uno de estos colores: rojo, azul, verde y amarillo. Se extraen, de una en una, tres bolas y se colocan sobre una mesa en el orden de extracción.**

a) ¿Cuántas colocaciones diferentes podemos tener si la bola extraída no se devuelve a la urna?

b) ¿Y si la bola se extrae con devolución?

EJEMPLO

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas del cine?

En las distintas ordenaciones importa el orden. Y como dos personas no se sientan en la misma butaca, no hay elementos repetidos. Además, tenemos 8 elementos y los ordenamos.

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320 \text{ formas}$$

3 **Daniel, Viviana y Nicolás quieren repartirse tres libros distintos. ¿De cuántas formas diferentes pueden hacer el reparto?**

4 **Patricia tiene seis postales distintas que quiere enviar a seis amigos. ¿De cuantas maneras diferentes las puede enviar?**

5 **Con las cifras del número 53.412:**

a) ¿Cuántos números de tres cifras distintas puedo formar?

b) Y si se repiten las cifras, ¿cuántos números de tres cifras se obtienen?

c) Calcula los números que se pueden formar con las cinco cifras.

6 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $P_9 - P_7$ b) $V_{6,3} + VR_{3,2}$ c) $P_5 - V_{5,3}$

13 OBJETIVO 5

IDENTIFICAR COMBINACIONES DE *n* ELEMENTOS TOMADOS DE *m* EN *m*

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **combinaciones** de n elementos, tomados de m en m, $C_{n,m}$, se utilizan para contar el número de grupos diferentes, en los que no importa el orden, que se pueden formar con m elementos distintos, elegidos de un conjunto de n elementos.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

EJEMPLO

¿Cuántos puntos de intersección producen 7 rectas coplanarias sabiendo que no hay dos rectas paralelas ni más de tres rectas que se corten en el mismo punto?

Tenemos $n = 7$ elementos y los colocamos en grupos de $m = 2$ elementos. No importa el orden, y el punto de intersección de las rectas r y s es el mismo que el de las rectas s y r.

$$C_{n,m} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21 \text{ puntos}$$

1 **¿Cuántas sumas diferentes, de cuatro sumandos distintos de una sola cifra, se pueden formar?**

2 **¿Cuántas multiplicaciones diferentes, de cuatro factores distintos de una sola cifra, se pueden formar con la condición de que el producto no sea cero?**

3 **Ana, Borja, Isabel, María, Diego y Beatriz hacen un torneo de tenis. Si todos juegan entre sí, ¿cuántos partidos individuales tendrá el torneo?**

DISTINGUIR ENTRE VARIACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Para distinguir entre variaciones, variaciones con repetición, permutaciones y combinaciones hay que contestar a tres preguntas.

<table>
<tr><td rowspan="4">¿Influye el orden?</td><td>No</td><td colspan="5">Combinaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Sí</td><td rowspan="3">¿Se trabaja con todos los elementos?</td><td>Sí</td><td colspan="3">Permutaciones</td></tr>
<tr><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">¿Se pueden repetir los elementos?</td><td>Sí</td><td>Variaciones con repetición</td></tr>
<tr><td>No</td><td>Variaciones</td></tr>
</table>

EJEMPLO

Halla cuántas palabras de tres letras distintas, tengan o no sentido, pueden formarse con las letras de la palabra CAMINO si todas deben empezar por *c* y no pueden contener la letra *o*.

¿Influye el orden? Sí.

¿Se trabaja con todos los elementos? No.

¿Se pueden repetir los elementos? No.

Son variaciones, pues todas las palabras han de empezar por *c* y no pueden incluir la letra *o*, siendo $n = 4$ elementos, tomados en grupos de $m = 3$.

$$V_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ palabras}$$

1 **¿De cuántas formas distintas podemos colocar nueve discos en una caja?**

¿Influye el orden?

¿Se trabaja con todos los elementos?

¿Se pueden repetir los elementos?

2 **Pilar confecciona jerseys de dos colores. Si tiene lana de 10 colores diferentes, ¿cuántos tipos de jerseys puede hacer?**

¿Influye el orden?

¿Se trabaja con todos los elementos?

¿Se pueden repetir los elementos?

3 **Con los números 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos múltiplos de 5 de tres cifras se pueden formar?**

a) Las cifras han de ser distintas.

b) Las cifras se pueden repetir.

4 **Un alumno tiene 9 asignaturas en un curso. La nota de cada asignatura puede ser suspenso, aprobado, bien, notable o sobresaliente. ¿Cuántos boletines de notas distintos puede obtener?**

5 **En una oposición, el temario consta de 75 temas. El día del examen se eligen dos temas al azar. ¿Cuántos exámenes se pueden hacer?**

6 **Un bar prepara bocadillos de tres ingredientes. Si dispone de 12 ingredientes distintos, ¿cuántas clases de bocadillos puede preparar?**

7 **Con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuántos números pares de seis cifras distintas se pueden formar?**