5 Polinomios

INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros conceptos asociados a él.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos, se estudiará cómo operar con polinomios. Las dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Conviene seguir los ejemplos resueltos, dejar claro el proceso seguido y hacer hincapié a los alumnos en la necesidad de colocar correctamente cada término para operar sin cometer errores.

Asimismo, es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una suma de monomios.
- Un *polinomio reducido* no tiene monomios semejantes. Su grado es el grado del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.
- La *suma de dos polinomios* se hace sumando los términos semejantes de ambos.
- La *resta de dos polinomios* se hace sumando al primer polinomio el opuesto del segundo.
- La *multiplicación de dos polinomios* se hace multiplicando cada uno de los monomios de uno por todos los monomios del otro.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- *Igualdades notables*.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer el grado, y los elementos que forman un polinomio.	• Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio. • Reducción de polinomios. • Ordenación de los términos de un polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar el valor numérico de un polinomio.	• Valor numérico de un polinomio.	• Cálculo del valor numérico de un polinomio.
3. Realizar operaciones con polinomios: sumas y restas.	• Suma y resta de polinomios.	• Suma y resta de polinomios.
4. Realizar operaciones con polinomios: multiplicación.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicación de la propiedad distributiva.
5. Realizar operaciones con polinomios: división.	• División de polinomios.	• División de polinomios. • Comprobación de las divisiones.
6. Identificar y desarrollar igualdades notables.	• Cuadrado de una suma. • Cuadrado de una diferencia. • Producto de una suma por una diferencia.	• Identificación y desarrollo de las igualdades notables.

5 OBJETIVO 1
RECONOCER EL GRADO Y LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio lo primero que hay que hacer es operar:

$$P(x) = 5x^2 \underbrace{- 3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2$$ **Polinomio reducido**

b) El grado del polinomio es grado 2: $P(x) = 5x^2 - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2}$ → -2 es el término independiente.

→ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ es un **polinomio completo**.

grado: 2 1 0

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underset{3}{\underline{7x^3}} + \underset{2}{\underline{2x^2}} + \underset{0}{\underline{3}}$ es un **polinomio incompleto**, pues falta el término de grado 1.

grado: 3 2 0

1 **Reduce los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$\boldsymbol{P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5}$$

$P(x) =$ ______________________

- Tiene ______________ términos.
- El término independiente es ______________
- El grado del polinomio es ______________
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ______________

3 **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$\boldsymbol{P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3}$$

$P(x) =$ ______________________

- Tiene ______________ términos.
- El término independiente es ______________
- El grado del polinomio es ______________
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? ______________

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTAN LOS TÉRMINOS
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $\boldsymbol{Q(x) = 2x^5 + x^2 - x}$, indica:**

a) Si el polinomio es ordenado.
b) Si el polinomio está reducido.
c) Si el polinomio es completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5

OBJETIVO 2

DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor a sustituyendo a x:

Para $x = 2$:
$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 2, es 9.

Para $x = 10$:
$P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomio, cuando introducimos el valor 10, es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ \ ) = \boxed{} + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

OBJETIVO 3

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS 5

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{rrr} & P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + & Q(x) = & 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline & P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{rrr} & P(x) = & 3x^3 - 5x^2 \qquad + 5 \\ - & Q(x) = & -(5x^2 - 2x + 7) \\ \hline & P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de estos polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$
$+\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$

$P(x) =$
$-\ Q(x) =$

$P(x) - Q(x) =$

OBJETIVO 4

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.

$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$

$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$

$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

Solo se suman términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$

Multiplica los monomios.

$= \boxed{} - \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{} + \boxed{} =$

$=$

Suma los términos.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$
\begin{array}{lr}
P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times\ Q(x) = & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
+ & 7x^5 + 2x^4 + 21x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
\end{array}
$$

← *Producto de 3 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Producto de x^2 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Suma de monomios semejantes.*

2 **Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$**

$$
\begin{array}{lr}
P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times\ Q(x) = & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
+ & \\
\hline
\end{array}
$$

$\boxed{P(x) \cdot Q(x) = \qquad}$

← *Producto de 2 por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Producto de 3x por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Suma de monomios semejantes.*

3 **Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

OBJETIVO 5

REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  $\boldsymbol{P(x)}$ es el polinomio **dividendo**.

  $\boldsymbol{Q(x)}$ es el polinomio **divisor**.

  $\boldsymbol{C(x)}$ es el polinomio **cociente**.

  $\boldsymbol{R(x)}$ es el polinomio **resto**.

- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

  La **división** es **exacta**.

  El polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ **es divisible por** $\boldsymbol{Q(x)}$.

- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $\boldsymbol{P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7}$ y $\boldsymbol{Q(x) = x^2 + 5}$

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} & \bigcirc \end{array}$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. *En este caso,* $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad \cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\ \qquad -\cancel{3x^2} \qquad\;\; - 15 & \\ \hline \qquad\quad - 20x - 22 & \end{array}$$

Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente (x^2, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $20x$, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5

1 **Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \overbrace{ab + ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\boldsymbol{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\boldsymbol{(4x + y)} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 \overbrace{- ab - ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$\boldsymbol{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\boldsymbol{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$\mathbf{(3x + 2) \cdot (3x - 2)} = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$\mathbf{(5x - 3y) \cdot (5x + 3y)} = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla los siguientes productos.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla los productos.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

